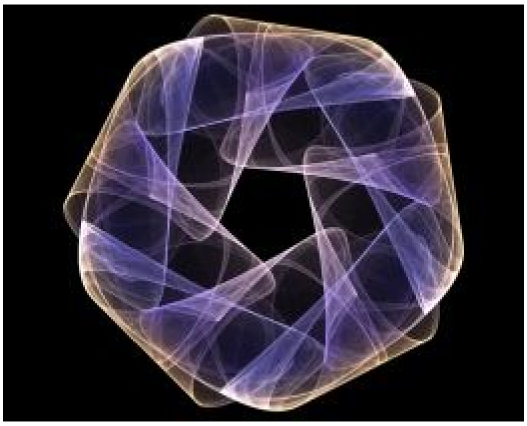
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ



Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

ΘΕΜΑ 1. [B]

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3\alpha + 10\beta i$ και $z_2 = 3\gamma + 10\beta i$ για τους οποίους ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$
Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(x) = 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$

B1. Να αποδείξετε ότι $100\beta^2 + 9\alpha\gamma = \mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2) = 0$

B2. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 δεν είναι σημεία των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες τέμνονται κάθετα.

B3. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$

B4. Να αποδείξετε ότι αριθμοί $w_1 = \dfrac{z_1}{z_2}$ και $w_2 = \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι φανταστικοί με $\mathrm{Im}(w_1) = \dfrac{30\beta(\gamma - \alpha)}{9\gamma^2 + 100\beta^2}$ και $\mathrm{Im}(w_2) = \dfrac{-30\beta(\gamma - \alpha)}{9\alpha^2 + 100\beta^2}$

B5. Αν $\alpha = -\gamma$, να αποδείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των αριθμών w_1 και w_2 ισαπέχουν από την εικόνα του αριθμού -1

Ενδεικτικές λύσεις

Β1. Με άμεση αντικατάσταση των $z_1 = 3\alpha + 10\beta i$ και $z_2 = 3\gamma + 10\beta i$ στην υπόθεση $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ και εφαρμόζοντας τον ορισμό του μέτρου μιγαδικού αριθμού καταλήγουμε στο ζητούμενο $100\beta^2 + 9\alpha\gamma = 0$
Είναι $\overline{z_1}z_2 = \left(100\beta^2 + 9\alpha\gamma\right) + 30\beta(\alpha - \gamma)i$, οπότε και $\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) = 0$

Σχόλιο
Ξεκινώντας από την υπόθεση $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$, τετραγωνίζοντας τα μέλη της, και εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών καταλήγουμε πάλι (με άλλο τρόπο) στη σχέση $\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right) = 0$

Β2. Από το Β1 παίρνουμε $\alpha\gamma = -\dfrac{100}{9}\beta^2$ και καθώς δίνεται $\beta \neq 0$ προκύπτει $\alpha \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ Οπότε οι εικόνες των z_1 και z_2 δεν είναι σημεία των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.
Έστω M και N οι εικόνες των z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε για τις διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 έχουμε:
$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (3\alpha, 10\beta)$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (3\gamma, 10\beta)$ και επομένως $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 9\alpha\gamma + 100\beta^2$
Και λόγω του Β1 παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$
Από την ισότητα $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ON}} = 0$ προκύπτει ότι οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ είναι κάθετες (ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων).

Μια άλλη γεωμετρική προσέγγιση
Αν $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ είναι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος $z_1 + z_2$, τότε, καθώς το OMAN είναι παραλληλόγραμμο, η υπόθεση $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ εκφράζει ότι οι διαγώνιές του είναι ίσες. Οπότε το OMAN είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και επομένως οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ τέμνονται κάθετα.

Β3. $f(x) = 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x$, $x \in \mathbb{R}$
και $f'(x) = 35x^6 + 20x^4 - 3\alpha\gamma$, $x \in \mathbb{R}$
Είναι $f'(x) > 0$ αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $35x^6 \geq 0$, $20x^4 \geq 0$ και $-3\alpha\gamma > 0$, καθώς από το Β1 προκύπτει $\alpha\gamma = -\dfrac{100}{9}\beta^2 < 0$ εφόσον $\beta \neq 0$
Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 και συνεπώς η f αντιστρέφεται.
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^7 + 4x^5 - 3\alpha\gamma x = 0 \Leftrightarrow x\left(5x^6 + 4x^4 - 3\alpha\gamma\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, καθώς $5x^6 + 4x^4 - 3\alpha\gamma > 0$. Άρα μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 0$

Ισχύουν οι ισοδυναμίες $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x=f(0) \Leftrightarrow x=0$. Δηλαδή η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$

Β4. Από το ερώτημα Β1 έχουμε $\operatorname{Re}(\overline{z}_1 z_2)=0$, οπότε ο αριθμός $\overline{z}_1 z_2$ είναι φανταστικός. Και ανάλογα προκύπτει ότι και ο αριθμός $\overline{z}_2 z_1$ είναι επίσης φανταστικός.
Με αυτές τις σκέψεις, για το Β4 έχουμε:

$w_1=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}=\dfrac{1}{|z_2|^2}\cdot z_1\overline{z}_2$, που είναι φανταστικός αριθμός κ.τ.λ.

Σχόλια
Δίνουμε δυο ακόμη τρόπους λύσης του Β4:

1. $$\begin{aligned}|z_1-z_2|=|z_1+z_2| &\Leftrightarrow \left|z_2\left(\frac{z_1}{z_2}-1\right)\right|=\left|z_2\left(\frac{z_1}{z_2}+1\right)\right|\\ &\Leftrightarrow |z_2||w_1-1|=|z_2||w_1+1|\\ &\Leftrightarrow |w_1-1|=|w_1+1|\\ \ldots &\Leftrightarrow \overline{w}_1=-w_1 \text{ κ.τ.λ.}\end{aligned}$$

2. Με άμεση αντικατάσταση των $z_1=3\alpha+10\beta i$ και $z_2=3\gamma+10\beta i$ στη σχέση $w_1=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$ και παίρνοντας υπόψη ότι $100\beta^2+9\alpha\gamma=0$ βρίσκουμε πάλι ότι ο αριθμός w_1 είναι φανταστικός με $\operatorname{Im}(w_1)=\dfrac{30\beta(\gamma-\alpha)}{9\gamma^2+100\beta^2}$ κ.τ.λ.

Β5. Καταρχάς με $\alpha=-\gamma$ προκύπτει $w_1=-w_2$ οπότε και $|w_1|=|-w_2|=|w_2|$
Οι εικόνες των w_1 και w_2 θα ισαπέχουν από την εικόνα του -1 αν αποδείξουμε ότι $|w_1-(-1)|=|w_2-(-1)|$ κ.τ.λ.

ΘΕΜΑ 2.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = \alpha + \gamma i$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta < \gamma$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση: $|z + w| = |z - w|$
Θεωρούμε επίσης συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathrm{A} = [\beta, \gamma]$ και σύνολο τιμών $f(\mathrm{A}) = [\beta, \gamma]$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. Ο αριθμός $z\overline{w}$ είναι φανταστικός και $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$

β. Η εξίσωση $\dfrac{x + f(\beta)}{x - \beta} + \dfrac{x + f(\gamma)}{x - \gamma} + 3 = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (β, γ) και είναι ετερόσημες.

Β. Αν $g(x) = \dfrac{\beta x^3 + \gamma x^2 + \eta\mu \frac{\gamma}{x}}{\gamma x^2}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
όπου τα β, γ όπως ορίσθηκαν παραπάνω.

ΘΕΜΑ 3.

Έστω συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $(f(x))^2 + f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = -1$
- $f(-1) = k$

α. Να αποδείξετε ότι $k = 2$

β. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$

δ. Αν $f(x_0) = x_0$, να αποδείξετε ότι $x_0 = \dfrac{1}{2}$

ε. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

ΘΕΜΑ 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 4\cdot e^{-2}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες των x και y και την ευθεία $x=\alpha$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β. Να βρείτε:

i. το σύνολο τιμών της f

ii. τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

iii. την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(e,f(e))$ της C_f

γ. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta<1$, να αποδείξετε ότι: $\beta^{\alpha^2}>\alpha^{\beta^2}$

ΘΕΜΑ 6.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot\ln(x+1)-(x+1)\cdot\ln x$ με $x>0$
Να αποδείξετε ότι:

α. για κάθε $x>0$ ισχύει $x\cdot\ln(x+1)-x\cdot\ln x-1<0$

β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ 7.

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,7]$
Αν η f είναι κυρτή στο $[1,7]$ και $f(1)=f(7)=0$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $x_0 \in (1,7)$, στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[1,7]$

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1,7)$ ισχύει $f(x)<0$

δ. Αν $x_1 \in (1,7)$ να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f'(x_1)\cdot(x-x_1)+f(x_1)$ για κάθε $x \in (1,7)$

ΘΕΜΑ 8.

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

- $(1+e^x)\cdot f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0)=1$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $0<f(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $\mathrm{A}(0,1)$

δ. Αν $\mathrm{M}(\alpha,f(\alpha))$ και $\mathrm{N}(-\alpha,f(-\alpha))$, όπου $\alpha>0$, είναι σημεία της C_f, να αποδείξετε ότι:

i. Οι εφαπτόμενες της C_f στα M και N είναι παράλληλες.

ii. Το σημείο καμπής A της C_f είναι μέσο του ευθ. τμήματος MN

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες των x και y και την ευθεία $x=1$

ΘΕΜΑ 9. [Γ]

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa \cdot x + \lambda \cdot \ln\left(x^2 + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $0 < \lambda < \kappa$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\kappa \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) - \lambda \cdot \ln \frac{\left(25x^2 - 60x + 36\right) + 1}{x^4 + 1} = 0$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$ με αρνητική τεταγμένη.

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} x \cdot f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 10.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και συνάρτηση g τέτοιες, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$g(x) = x^2 - k \cdot \eta\mu x - \int_1^x x f(t)\,dt \geq 0$, όπου k πραγματικός αριθμός.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\int_0^1 f(t)dt = k$

β. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = G(1) - G(0) = k$

ΘΕΜΑ 11.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$ είναι $1-1$

β. Αν η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τις σχέσεις: $g(x) > 0$ και $g(x) = 1 + \int_0^x g(t) \cdot \frac{1+e^t}{1+g(t)} dt$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) + \ln g(x) = x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε τον τύπο της g

ΘΕΜΑ 12. [Δ]

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$
- $f''(0) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ.1 Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$

Δ.2 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Δ.3 Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση g έχει ολικό ελάχιστο.

β. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x g(x)} = +\infty$

Δ.4 Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$

Δ.5 Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι $\mathrm{E} = e - \frac{5}{2}$, τότε:

α. να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)\, dx$

β. να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^\xi f(t)\, dt = 2$

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Προσωπικές Σημειώσεις
[2] Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου
[3] Περιοδικό *Ευκλείδης Β΄* της ΕΜΕ
[4] Περιοδικό *Απολλώνιος* του Παρ/τος Ημαθίας της ΕΜΕ
[5] http://mathematica.gr