

Γεωμετρία Β' Λυκείου
Θεωρήματα διχοτόμων – Αρμονικά συζυγή – Ομοιότητα τριγώνων.

Καρδαμίτσης Σπύρος

«Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.»

Από το V βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη

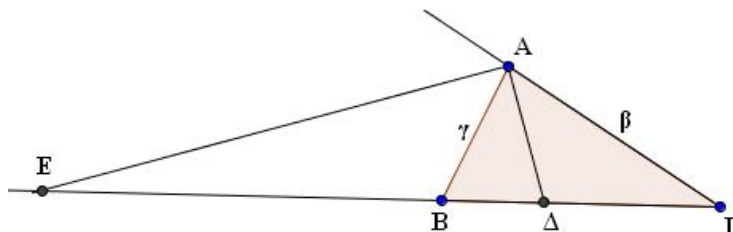
ΑΣΚΗΣΗ 1"

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A τέμνουν την ευθεία της πλευράς $B\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία Δ και E είναι αρμονικά συζυγή των B και Γ .

β) Αν $a = 13$, $\beta = 14$ και $\gamma = 12$ να υπολογιστεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔE .

ΛΥΣΗ



α) Είναι η $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας A , επομένως $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}$, και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A , οπότε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$ άρα $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Δ και E είναι αρμονικά συζυγή των B και Γ .

β) Είναι $\Delta B = \frac{a\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{13 \cdot 12}{14 + 12} = 6$

αφού $\beta > \gamma$ έχουμε ότι $EB = \frac{a\gamma}{\beta - \gamma} = \frac{13 \cdot 12}{14 - 12} = 78$

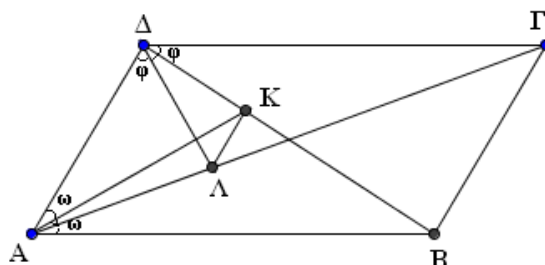
ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Δ τέμνουν τις διαγωνίες του ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AK \perp \Delta\Lambda$

β) $K\Lambda \parallel B\Gamma$

ΛΥΣΗ



α) Αφού οι ΑΚ και ΔΛ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ αντίστοιχα τότε

$$\hat{\Delta AK} = \hat{KAB} = \hat{\omega} \text{ και } \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = \hat{\Lambda\Delta A} = \hat{\phi}$$

Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο είναι $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ή $2\omega + 2\phi = 180$ ή $\omega + \phi = 90^\circ$ άρα $AK \perp \Delta\Lambda$

β) Εφ' όσον οι ΑΚ και ΔΛ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΑΔΒ και ΑΔΓ αντίστοιχα, τότε

$$\text{ισχύουν: } \frac{AD}{AB} = \frac{KD}{KB} \text{ και } \frac{AD}{\Gamma\Delta} = \frac{LD}{\Lambda K}$$

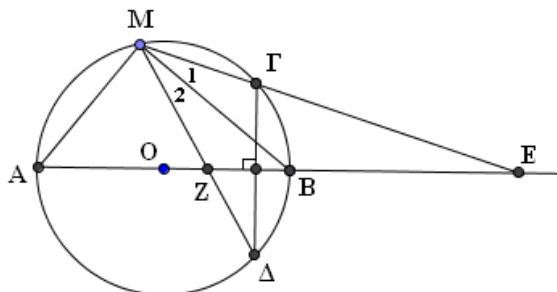
αλλά $AB = \Gamma\Delta$ (ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο) τότε από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$\frac{KD}{KB} = \frac{LD}{\Lambda K}, \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε } K\Lambda \parallel A\Delta.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Δίνεται κύκλος με διάμετρο (O,R) με διάμετρο AB . Έστω M τυχαίο σημείο του κύκλου και $\Gamma\Delta$ μια χορδή κάθετη στην διάμετρο AB . Αν τα τμήματα $M\Gamma$ και $M\Delta$ τέμνουν την διάμετρο AB στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα σημεία B και A είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα Z και E .

ΛΥΣΗ



Επειδή είναι $\Gamma\Delta$ κάθετη στην AB τότε είναι $B\Gamma = B\Delta$, επομένως και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, δηλαδή η MB είναι εσωτερική διχοτόμος της γωνίας M στο τρίγωνο ZME , άρα $\frac{MZ}{ME} = \frac{BZ}{BE}$ (1)

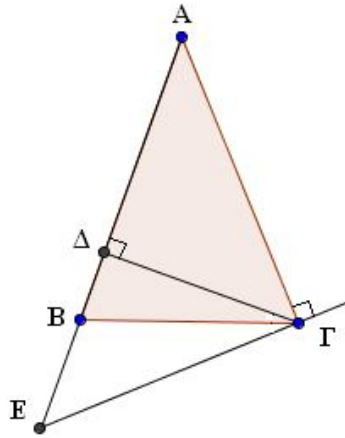
Επειδή $\hat{AMB} = 90^\circ$ ως γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι $MA \perp MB$ δηλαδή η MA είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας M στο τρίγωνο ZME , άρα $\frac{MZ}{ME} = \frac{AZ}{AE}$ (2)

Τέλος από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{BZ}{BE} = \frac{AZ}{AE}$, δηλαδή τα σημεία B και A είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα Z και E .

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $\Gamma\Delta$ και ημιευθεία $\Gamma\chi \perp A\Gamma$, που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι: $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$.

ΛΥΣΗ



Στο τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε ότι: $\hat{B}\Gamma E = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

και στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχουμε ότι: $\hat{B}\Gamma\Delta = 90^\circ - \hat{B}$

αλλά είναι $B = \Gamma$ αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές επομένως είναι:

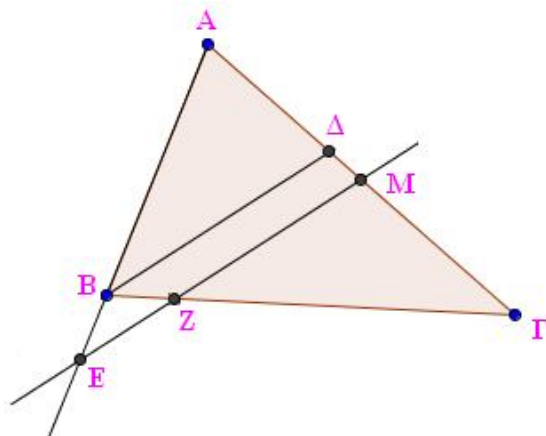
$\hat{B}\Gamma E = \hat{B}\Gamma\Delta$, δηλαδή η $B\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$ του τριγώνου $\Delta\Gamma E$ επομένως

σύμφωνα με το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε: $\frac{B\Delta}{BE} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E}$

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ η διχοτόμος του. Από το μέσο Μ της πλευράς του ΑΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη της διχοτόμου ΒΔ που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ και την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΕ.

ΛΥΣΗ



Λόγω των παραλλήλων ΒΔ και ΕΜ από το θεώρημα του Θαλή έχουμε τις αναλογίες

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AM}{EM} \quad (1) \text{ και } \frac{GZ}{GB} = \frac{GM}{GD} \quad (2)$$

πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{AB}{AE} \cdot \frac{GZ}{GB} = \frac{AM}{EM} \cdot \frac{GM}{GD} \quad (3)$$

επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε την αναλογία

$$\frac{AB}{BG} = \frac{AD}{DG}$$

με βάση την αναλογία αυτή η σχέση (3) απλοποιούμενη γίνεται:

$$\frac{GZ}{AE} = \frac{GM}{AM}$$

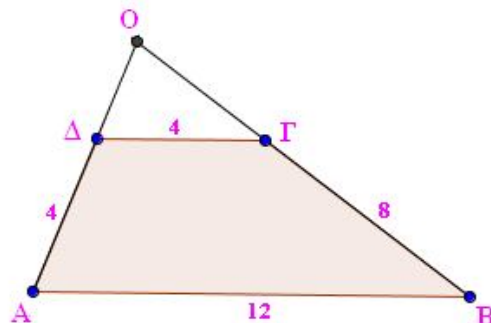
επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΓ έχουμε τελικά

$$\frac{GZ}{AE} = \frac{GM}{AM} = 1 \text{ άρα } GZ = AE.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο σημείο Ο. Αν είναι $AB = 12\text{cm}$, $ΓΔ = ΑΔ = 4\text{cm}$ και $ΒΓ = 8\text{cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΔ και ΟΓ.

ΛΥΣΗ



Τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν την γωνία Ο κοινή και $\hat{ΟΓΔ} = \hat{ΟΑΒ}$ λόγω των παραλλήλων πλευρών του τραπεζίου, επομένως είναι όμοια οπότε: $\frac{ΟΔ}{ΟΑ} = \frac{ΟΓ}{ΟΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ}$

$$\text{ή } \frac{ΟΔ}{ΟΔ + ΑΔ} = \frac{ΟΓ}{ΟΓ + ΒΓ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} \text{ ή } \frac{ΟΔ}{ΟΔ + 4} = \frac{ΟΓ}{ΟΓ + 8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

επομένως έχουμε:

$$\frac{ΟΔ}{ΟΔ + 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3ΟΔ = ΟΔ + 4 \Rightarrow ΟΔ = 2\text{cm. και}$$

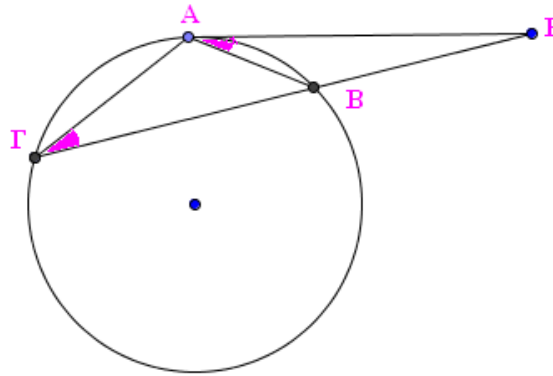
$$\frac{ΟΓ}{ΟΓ + 8} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3ΟΓ = ΟΓ + 8 \Rightarrow ΟΓ = 4\text{cm.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Δίνεται κύκλος κέντρου O και σημείο P εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο P φέρνουμε μια εφαπτόμενη του κύκλου PA και μια τέμνουσα PBG . Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{PB}{PG}$$

ΛΥΣΗ



Τα τρίγωνα PAB και PAG έχουν την γωνία P κοινή και $\hat{PAB} = \hat{AGB}$ (χορδή και εφαπτομένη) επομένως είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PG}$$

$$\text{ή } \frac{AB}{AG} = \frac{PB}{PA} \quad (1) \text{ και } \frac{AB}{AG} = \frac{PA}{PG} \quad (2)$$

με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

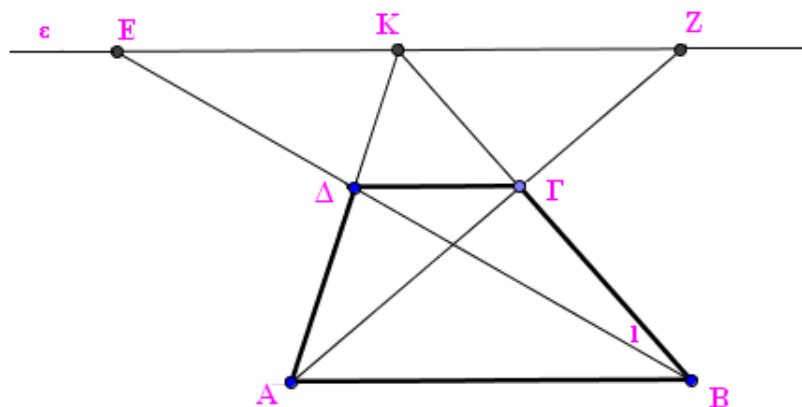
$$\frac{AB}{AG} \cdot \frac{AB}{AG} = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PA}{PG} \Rightarrow \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{PB}{PG}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται σε σημείο Κ. Από το σημείο Κ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του τραpezίου, που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγωνίων του τραpezίου ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- α) $\frac{ΒΓ}{ΒΚ} = \frac{ΔΓ}{ΕΚ}$
β) $ΕΚ = ΚΖ$

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΚ έχουν την γωνία $\hat{B}_1$ κοινή και $\hat{ΕΒΚ} = \hat{ΔΓΒ}$ λόγω των παραλλήλων ευθειών (ε) και ΓΔ. Συνεπώς είναι όμοια άρα $\frac{ΒΓ}{ΒΚ} = \frac{ΔΓ}{ΕΚ}$

β) Ανάλογα με το πρώτο ερώτημα και τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΚΖ είναι όμοια

$$\text{οπότε } \frac{ΑΔ}{ΑΚ} = \frac{ΔΓ}{ΚΖ}$$

επειδή λόγω των παραλλήλων ευθειών (ε), ΓΔ και ΑΒ ισχύει $\frac{ΒΓ}{ΒΚ} = \frac{ΑΔ}{ΑΚ}$, από τις

προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι $\frac{ΔΓ}{ΕΚ} = \frac{ΔΓ}{ΚΖ}$, άρα είναι $ΕΚ = ΚΖ$.

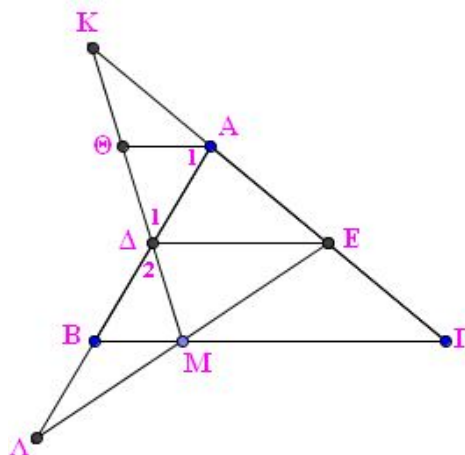
ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς του ΒΓ. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία ΕΜ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Λ και η ευθεία ΜΛ την ΑΓ στο σημείο Κ. Αν είναι ΑΘ//ΔΕ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΚΑ}{ΚΕ} = \frac{ΒΜ}{ΔΕ}$

γ) ΑΜ//ΚΛ

ΛΥΣΗ



α) Τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ συνεπώς ΔΕ//ΒΓ. Αφού

ΑΘ//ΔΕ τότε θα είναι και ΑΘ//ΒΓ άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφή γωνίες και ΑΔ = ΒΔ, συνεπώς τα τρίγωνα ΑΘΔ και ΒΔΜ είναι ίσα.

Τα τρίγωνα ΚΑΘ και ΚΔΕ είναι όμοια τότε $\frac{ΚΑ}{ΚΕ} = \frac{ΑΘ}{ΔΕ}$ και από την ισότητα των τριγώνων

ΑΘΔ και ΔΒΜ είναι ΑΘ = ΒΜ, οπότε η σχέση γίνεται $\frac{ΚΑ}{ΚΕ} = \frac{ΒΜ}{ΔΕ}$

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΛΒΜ και ΛΔΕ έχουμε

$$\frac{ΛΜ}{ΛΕ} = \frac{ΒΜ}{ΔΕ}$$

και με βάση το α) ερώτημα έχουμε $\frac{ΚΑ}{ΚΕ} = \frac{ΛΜ}{ΛΕ}$ οπότε από το Θεώρημα του Θαλή είναι

ΑΜ//ΚΛ

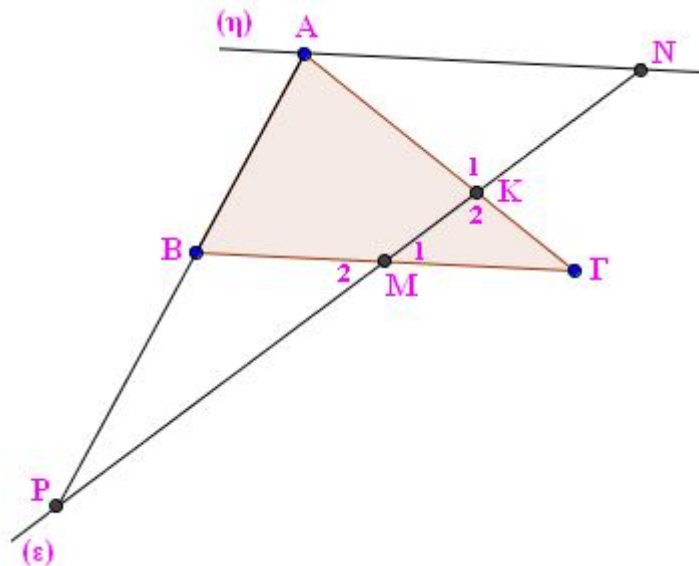
ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της πλευράς του ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρνουμε τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ρ και Κ αντίστοιχα και από το σημείο Α ευθεία (η) παράλληλη της πλευράς ΒΓ του τριγώνου που τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΡΑΝ και ΡΒΜ είναι όμοια

β) $PN \cdot KM = PM \cdot KN$

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΡΑΝ και ΡΒΜ έχουν την γωνία $\hat{P}$ κοινή και $\hat{N} = \hat{M}_2$ λόγω των παραλλήλων (η) και ΒΓ, επομένως είναι όμοια, άρα $\frac{PN}{PM} = \frac{AN}{BM}$

β) Τα τρίγωνα ΚΑΝ και ΚΜΓ έχουν $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατακορυφή γωνίες) και $\hat{N} = \hat{M}_1$ επομένως είναι όμοια, άρα $\frac{KN}{KM} = \frac{AN}{MG}$

αλλά $MB = MG$ αφού το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{KN}{KM} = \frac{AN}{BM}$$

Τέλος από την παραπάνω σχέση και από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\frac{PN}{PM} = \frac{KN}{KM} \Rightarrow PN \cdot KM = PM \cdot KN$$